

Mathématiques

Maturité commerciale - Examen 2003

Directives

- Toutes les feuilles, y compris les feuilles de brouillon, doivent être rendues avec le nom du candidat. Les feuilles de données doivent également être rendues à la fin de l'examen.
- Chaque problème doit commencer sur une nouvelle page. La présentation des solutions sera prise en compte.
- Les problèmes peuvent être traités dans n'importe quel ordre, pour autant que les numéros soient clairement indiqués.
- Tous les calculs et raisonnements doivent figurer sur la copie définitive. Une réponse non justifiée **ne sera pas prise en considération**.
- Le formulaire de l'école, ainsi qu'une machine à calculer sans écran graphique et non programmable sont autorisés.
- La durée de l'examen est de 3 heures.

Dotation des problèmes :

Problème 1 : 10 points

Problème 2 : 10 points

Problème 3 : 11 points

Problème 4 : 4 points

Problème 5 : 6 points

Problème 6 : 7 points

Présentation : 2 points

BON TRAVAIL !

Questions techniques

Problème 1 Calcul littéral, équations et systèmes

a) Effectuer et simplifier au maximum.

$$\frac{x^7}{2x^2 + 4x} \div \frac{x^3}{x^2 - 5x - 14}$$

b) Résoudre l'équation logarithmique suivante.

$$2 \log_5 x + \log_5 \frac{17 + 4x}{x^2} = 2$$

c) Résoudre l'équation bicarrée suivante.

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

d) Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + y = -8 \\ 3x - y - 2z = 18 \end{cases}$$

Problème 2 Fonctions

On donne les fonctions f , g et h par leurs expressions fonctionnelles.

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 5 \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

- Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
- Déterminer l'image de -1 par la fonction g .
- Calculer $g \circ f(4)$.
- Donner l'expression fonctionnelle $f^{-1}(x)$ de la fonction réciproque de f .
- Calculer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de f et de g .
- Quel est le domaine de définition de la fonction h ?

Applications

Problème 3 Programmation linéaire

Dans son petit Magasin du Monde, Martin propose deux sortes de riz à ses clients : un riz basmati de Thaïlande et un riz rouge du Laos.

Martin peut entreposer au maximum 150 kg de riz dans son magasin. Pour satisfaire à la demande, il faut qu'il ait en stock, au début de chaque mois, au moins autant de riz thaïlandais que de riz du Laos, mais au maximum 110 kg de riz thaïlandais.

Un kg de riz thaïlandais lui coûte 3.75 francs et un kg de riz du Laos 6.25 francs, et il consacre au maximum 700.- par mois à l'achat de riz.

Soit x le nombre de kg de riz thaïlandais et y le nombre de kg de riz du Laos que Martin se procure au début de chaque mois.

- a) Traduire les contraintes ci-dessus par un système linéaire d'inéquations en x et en y .
- b) Résoudre graphiquement le système et déterminer les sommets du polygone des contraintes. (Échelle : 1 carreau pour 10 unités.)
- c) Martin réalise un bénéfice de 1.35 francs sur chaque kg de riz thaïlandais et de 2.15 francs sur chaque kg de riz du Laos vendus.

En supposant qu'il vende tout son stock, combien de kg de chaque sorte de riz Martin doit-il se procurer par mois pour réaliser un bénéfice maximal ? À combien se monte ce bénéfice mensuel maximal ?

Problème 4 Progressions

La production d'une usine augmente de 150 unités par an. En 1998, la production a été de 2000 unités.

- a) En quelle année la production annuelle sera-t-elle de 5000 unités ?
- b) Quelle sera la production totale de 1998 à 2010 ?

Problème 5 Bénéfice

Une parfumerie a lancé un nouveau produit sur le marché en janvier 2002. Le bénéfice réalisé par la firme grâce à ce nouveau parfum au cours de l'année 2002 est donné par la formule

$$B(t) = -\frac{4}{23}t^2 + \frac{48}{23}t - 1$$

où t , le temps exprimé en mois, varie entre 0 et 12, et $B(t)$, le bénéfice en fonction de t , est exprimé en milliers de francs.

- a) Représenter graphiquement la fonction B . (Échelle : 2 carreaux pour 1 unité.)
- b) Quel a été le déficit au moment du lancement du produit ?
- c) À quel moment la parfumerie a-t-elle commencé à faire du bénéfice avec ce parfum ?
- d) À quel moment le bénéfice de la parfumerie a-t-il été maximal en 2002 ? Quel était ce bénéfice maximal ?

Problème 6 Intérêts composés

Yvonne a 40'000.- à placer en banque.

- a) Si elle les place à un taux d'intérêts t (intérêts composés annuels), son capital doublera en 26 ans. Que vaut t ?
- b) Finalement, Yvonne place cet argent au taux de 3,25%. Quelle sera sa fortune 26 ans plus tard ?
- c) Toujours au taux de 3,25%, après combien de temps la fortune d'Yvonne se montera-t-elle à 111'312.- ?

Yvan place une somme fixe en euros sur un compte d'épargne à 4,5% d'intérêts (composés annuellement) le premier janvier de chaque année depuis 2001.

- d) Le 31 décembre 2020, Yvan aura la coquette somme de 65'566.28 euros sur ce compte. Quelle somme place-t-il chaque année ?