

Mathématiques

Maturité commerciale voie longue – Examen 2002

Directives

- Toutes les feuilles, y compris les feuilles de brouillon, doivent être rendues avec le nom du candidat. Les feuilles de données doivent également être rendues à la fin de l'examen.
- Chaque problème doit commencer sur une nouvelle page. La présentation des solutions sera prise en compte.
- Les problèmes peuvent être résolus dans n'importe quel ordre, pour autant que les numéros soient clairement indiqués.
- Tous les calculs et raisonnements doivent figurer sur la copie définitive. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en considération.
- Le formulaire de l'école, ainsi qu'une calculatrice sans écran graphique et non programmable sont autorisés.
- La durée de l'examen est de 3 heures.

Dotation des problèmes:

Problème 1: 10 points

Problème 2: 10 points

Problème 3: 8 points

Problème 4: 8 points

Problème 5: 9 points

Problème 6: 10 points

Bon travail !

1) Équations et inéquations. Résoudre:

a) $x - 3 = \sqrt{3x - 5}$

b) $3 \cdot 5^{x-7} = 1875$

c) $\log_2(3x - 5) = \log_2(x + 1) + 1$

d) $3x^2 + 5x \leq 7 - 15x$

e) $\frac{x+1}{3x-5} < 0$

2) Dérivées et limites.

a) Déterminer la dérivée: $f(x) = (3x - 5) \cdot e^x$

b) Déterminer la dérivée: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) Calculer la limite: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$

d) Calculer la limite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + x + 7}$

e) Calculer la limite: $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

3) Intérêts composés:

Un ami m'a posé trois questions:

- a) Quel est le montant qu'il me faut mettre sur un compte d'épargne (taux 4%, intérêts composés) pour avoir 15'000 frs à disposition après 10 années de placement?
- b) Si je paie au début de chaque année (toujours le 1.1.) 500 frs sur un compte d'épargne (taux 4%, intérêts composés), quelle somme sera disponible à la fin de la 15^{ème} année des placements?
(premier paiement: 1.1.2002, dernier paiement 1.1.2016, capital le 31.12.2016)
- c) Combien faudrait-il payer sur le compte (taux 4%, intérêts composés) au début de chaque année (toujours le 1.1) si je souhaite avoir 15'000 frs à disposition après 15 années de placement?
(premier paiement: 1.1.2002, dernier paiement 1.1.2016, capital le 31.12.2016)

4) Programmation linéaire.

Une association d'architectes planifie la construction de maisons familiales et d'immeubles sur un terrain de 27'000m². Les parcelles des maisons familiales mesurent en moyenne 750m² et celles des immeubles sont de 3000m². Les coûts de construction d'une maison familiale sont estimés à 450'000 frs et ceux d'un immeuble à 1'200'000 frs. Les architectes ne veulent pas investir plus de 14,4 millions francs. Suite à des demandes de personnes intéressées, ils ont décidé de construire au moins 15 bâtiments (maisons familiales et immeubles confondus).

- Établir un système d'inéquations qui représente les contraintes.
(x : nombre de maisons familiales, y : nombre d'immeubles)
- Résoudre graphiquement le système d'inéquations. (Unité: 1 case sur les deux axes)
- Les architectes facturent pour leur propre travail 40'000 frs pour une maison familiale et 120'000 frs pour un immeuble.
Quelle est le nombre de maisons familiales et le nombre d'immeubles qu'il leur faut construire afin de rendre maximal leur revenu?
Quel est ce revenu maximal?

5) Géométrie.

Soient: le cercle $c: x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$
la droite $d: 3x - y + 4 = 0$
le point $P(4; -2)$

- Vérifier par calcul que le point P se trouve sur le cercle.
- Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d et du cercle c .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite d' qui est perpendiculaire à d et qui passe par le centre du cercle.

6) Étude de fonctions. Soit $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 4}$

Étudier la fonction $f(x)$ on observant les points suivants:

- Ensemble de définition
- Asymptote(s) verticale(s)
- Asymptote affine
- Signe et zéro(s)
- Croissance, points critiques, maximums et minimums

(Vérifier que $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{2(x - 2)^2}$)

- Courbure

(Utiliser que $f''(x) = \frac{9}{(x - 2)^3}$. Il n'est pas demandé de calculer f'')

- Représentation graphique de f