

Mathématiques

Maturité commerciale – Examen 2005

Directives

- Toutes les feuilles, y compris les feuilles de brouillon, doivent être rendues avec le nom du candidat. Les feuilles de données doivent également être rendues à la fin de l'examen.
- Chaque problème doit commencer **sur une nouvelle page**.
La présentation des solutions sera prise en compte.
- Les problèmes peuvent être résolus dans n'importe quel ordre, pour autant que les numéros soient clairement indiqués.
- Tous les calculs et raisonnements doivent figurer sur la copie définitive.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en considération.
- Le formulaire de l'école, ainsi qu'une calculatrice sans écran graphique et non programmable sont autorisés.
- La durée de l'examen est de 3 heures.

Dotation des problèmes:

Problème 1:	8 points	Problème 4:	12 points
Problème 2:	6 points	Problème 5:	8 points
Problème 3:	6 points	Problème 6:	10 points

Bon travail à tous!

1) **Résoudre:**

a) $9x^4 + 26x^2 - 3 = 0$

b) $\sqrt{2x-5} + x = 2x - 4$

c) $2^x = 7^{5-3x}$

d) $\log_2(3x+7) = 3 + \log_2(x-1)$

2) **Fonctions.**

Considérons les trois fonctions suivantes:

$$f(x) = 3x - 5 ; g(x) = 2^x \text{ et } h(x) = \sqrt{7-x}$$

- Déterminer l'image de 4 par la fonction $g \circ f$.
- Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction $g \circ f$.
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- Déterminer l'expression fonctionnelle $f^{-1}(x)$ de la fonction réciproque de f .

3) **Intérêts composés:**

- Un capital a été placé le premier janvier 1985 sur un compte d'épargne (intérêts composés).

Le taux d'intérêt a varié de manière suivante: Pendant 4 ans il était de 3,5%, ensuite pendant 7 ans de 3% et à la fin pendant 9 ans de 4,5%. Le premier janvier 2005 ce capital s'élevait à CHF 14'681.40.

Quel a été le capital qui a été placé le premier janvier 1985?

- Quel a été le taux moyen du placement?
- Pendant combien d'années faudrait-il encore placer ce capital de CHF 14'681.40 au taux de 5% (intérêts composés) jusqu'à ce qu'il s'élève à CHF 20'000 ?

4) **Parabole et droite.**

Considérons la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 6$

et la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 3$

- Déterminer par calcul les coordonnées du sommet de la parabole, ainsi que les coordonnées de ses points d'intersection avec les deux axes.
- Établir un graphique la parabole et de la droite (les deux dans le même graphique, unité: 2 carreaux sur les deux axes).
- Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec la droite.
- Résoudre graphiquement le système d'inéquations:

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x^2 - x + 6 \\ y \geq \frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$$

5) **Bénéfice maximal.**

Une entreprise produit des brouettes. Les coûts mensuels de production (en francs) se calculent d'après la formule suivante:

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 80x + 3000$$

où x est le nombre de brouettes produites par mois.

Une brouette est vendue à 200 francs la pièce.

(On suppose que toutes les brouettes qui sont produites sont aussi vendues.)

- Vérifier que la fonction du bénéfice mensuel est la suivante:

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 120x - 3000$$

- Combien faudrait-il produire de brouettes pour que la production soit rentable?
- Quel sont les frais mensuels fixes?
- Combien faudrait-il produire de brouettes pour obtenir un bénéfice maximal?
Quel est ce bénéfice maximal?
- Quel est le nombre de brouettes qu'il faut produire par mois, afin d'obtenir un bénéfice supérieur ou égal à 2400 francs par mois?

6) **Programmation linéaire.**

C'est le printemps et un agriculteur planifie sa production de maïs et de tournesols.

Au total il a au plus 13 hectares à disposition pour ces deux cultures.

Les prix des semences s'élèvent à 1500 frs par hectare pour le maïs et à 2000 frs par hectare pour les tournesols.

L'agriculteur estime le prix d'entretien (engrais, herbicides, insecticides, heures de machine, etc.) à 750 frs par hectare pour le maïs et à 500 frs par hectare pour les tournesols.

Le budget des semences est limité à 24'000 frs et celui des travaux d'entretien à 9000 frs.

Les recettes par hectare sont de 4500 frs pour le maïs et de 4800 frs pour les tournesols.

Soit x le nombre d'hectares de culture de maïs et y le nombre d'hectares de culture de tournesols.

- a) Établir un système d'inéquations qui décrit les contraintes.
- b) Résoudre graphiquement ce système.
- c) Déterminer par calcul les coordonnées des sommets du polygone des contraintes.
- d) Déterminer le nombre d'hectares de maïs et le nombre d'hectares de tournesols que l'agriculteur doit cultiver pour que ses recettes soient maximales et calculer ces recettes maximales.