

M A T H E M A T I Q U E

Durée de l'examen : 3 heures.

Note maximale 6 pour 5 exercices justes.

Tous les exercices ont le même poids.

Calculatrice agréée autorisée.

Formulaire de l'école à disposition.

Les résultats non justifiés ou obtenus par tâtonnement ne seront pas pris en considération.

1. Programmation linéaire

Un artiste forain confectionne et vend des bijoux dont un modèle de collier et de bracelet assortis, tous composés de perles rares de trois sortes : nacrées, cristallines et argentées, et d'autre matériel qu'on ne considérera pas dans ce problème.

Les colliers comportent chacun 5 perles de nacre, 5 perles de cristal et 1 perle d'argent.

Les bracelets comportent chacun 4 perles de nacre, 2 perles de cristal et 3 perles d'argent.

Ce forain ne peut pas se procurer plus de 80 perles de nacre par semaine, ni plus de 60 perles de cristal; quant aux perles d'argent, il peut s'en faire livrer 45 par semaine.

Il vend le collier 30 francs et le bracelet 20 francs.

- 1.1. Etablir un système d'inéquations décrivant les contraintes de fabrication.
- 1.2. Représenter graphiquement le domaine D du plan correspondant aux solutions possibles de ce système (hachurer D !).
- 1.3. Déterminer combien le forain devrait vendre chaque semaine de ces colliers et de ces bracelets pour encaisser une somme maximale, puis calculer cette somme.

2. Dénombrement et probabilités

Un jeu consiste à lancer une seule fois 3 dés habituels réguliers (aux faces marquées de 1 à 6), à savoir ; un rouge, un vert et un bleu, et à noter le résultat obtenu [par exemple si le dé rouge a donné 3, le vert 6 et le bleu 4, on notera (3 ; 6 ; 4)].

Si les 3 dés indiquent le même nombre de points, on dit qu'on a obtenu un triple.

- a) 1) Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
Justifier votre réponse par un "scénario", schéma ou formule !
 - 2) Quelle est la probabilité du résultat (3 ; 6 ; 4) ?
 - 3) Quelle est la probabilité d'obtenir un 3, un 6 et un 4 (ordre quelconque) ?
- b) On considère maintenant le total, T , des points obtenus [dans notre exemple $T = 13$].

Parmi toutes les issues possibles, combien conduisent à $T = 6$?
Quelle est donc la probabilité d'obtenir un total de 6 points ?
- c) Alice et Paul inventent le jeu suivant : pour jouer une partie (donc lancer les dés une fois), Alice doit céder 1 bonbon à Paul.
Si elle obtient un total de 6, Paul lui donne 20 bonbons.
Si elle obtient un triple impair [par exemple (5 ; 5 ; 5)], Paul lui donne 8 bonbons.
Si elle obtient le triple 6, c'est elle qui doit donner 8 bonbons à Paul.

Ce jeu est-il équilibré ? Justifier votre réponse par un calcul complet.

Voir suite au verso

3. Statistiques

160 élèves d'un collège ont passé un test de connaissances, noté en points. Voici les résultats obtenus :

Points	[0 ; 10 [[10 ; 20 [[20 ; 30 [[30 ; 40 [[40 ; 50 [[50 ; 60]
Effectif	3	19	32	52	44	10

- 3.1. Présenter un tableau complet permettant de calculer la moyenne \bar{x} et l'écart-type σ et y indiquer aussi les effectifs cumulés.
Calculer alors \bar{x} et σ sans utiliser les touches statistiques de la calculatrice.
- 3.2. Dessiner le polygone des effectifs cumulés.
Unités : pour les points, 1 classe, donc 10 points : 3 cm
pour les effectifs, 10 élèves : 1 cm.
- 3.3. Déterminer graphiquement la médiane, puis la calculer plus précisément par interpolation linéaire. Quelle est sa signification pour cette distribution ?
- 3.4. Tous les élèves ayant obtenu plus de 45 points sont invités à une exposition; pouvez-vous dire le nombre exact des élèves qui pourront s'y rendre ?
Si oui, indiquer combien. Si non, expliquer pourquoi !

4. Mathématiques financières

Un musicien désire acquérir un piano à queue d'une valeur actuelle de 75'000 francs.

- 4.1. Il dispose de la somme nécessaire, mais, pensant que le taux annuel d'intérêts composés sera maintenu fixe à 4,5% durant de nombreuses années, il examine quand même les propositions que lui fait le vendeur :

A : payer aujourd'hui, avec escompte de 3%

B : payer 80'000 francs dans 2 ans

C : payer 10'000 francs aujourd'hui, et 72'000 francs dans 3 ans

D : verser 6 annuités de 13'500 francs, la première aujourd'hui

Laquelle de ces quatre propositions ce musicien a-t-il avantage à choisir ?
- 4.2. Sachant q'un tel instrument, s'il n'est pas spécialement entretenu, perd chaque année 5% de sa valeur résiduelle (les dix premières années environ, ensuite il peut en reprendre), calculer dans combien de temps (années, mois, jours) il ne sera plus estimé qu'à 50'000 francs.

5. Equations et inéquations

- 5.1. Résoudre $\log(3x^2 - 2) = 1 + 2\log(x - 1)$
- 5.2. Résoudre $\frac{x^2 + 3x - 40}{2x - 5x^2} \leq 0$